Experiencias docentes en la etapa 12-18

En este bloque recogemos cinco experiencias de aula ubicadas en la etapa secundaria: dos en el primer ciclo de la enseñanza secundaria obligatoria (12-14 años), dos en el segundo ciclo (14-16 años) y una en el bachillerato (16-18). Se trata de experiencias en parte transferibles a otros niveles, basadas en propuestas muy diversas, con elementos del pensamiento crítico tal como éste ha sido caracterizado en el apartado anterior. Todos los autores tienen un contacto directo y diario con el aula desde hace años, y están vinculados a grupos de trabajo y centros desde donde llevan tiempo elaborando propuestas didácticas que contribuyan a mejorar el aprendizaje matemático de su alumnado. Recientemente, algunos de ellos han participado en programas de desarrollo de la práctica reflexiva en su ámbito profesional.

Aunque siempre es difícil identificar qué es innovador en educación, consideramos todas las experiencias innovadoras en tanto que muestran cambios cualitativos e ideas que introducen mejoras en el sistema del aula. Los textos sitúan la tarea del profesorado de matemáticas más allá del dominio de la materia y del conocimiento de destrezas pedagógicas y didácticas. Se nos explican cuestiones de planificación docente, formas de actuar en el aula y formas de evaluar esta actuación. Pensamos que son innovaciones asumibles con facilidad en otras aulas puesto que, en general, no conllevan grandes costes humanos ni económicos, ni tampoco la creación de situaciones límite. La calidad de las propuestas también tiene que ver con las posibilidades de extensión, generalización y continuidad. Cada experiencia es un caso único e irrepetible, pero hay aspectos importables a otros contextos que, probablemente, algunos de los lectores reconocerán en sus propias prácticas.

Pili Royo, en «Un proyecto de participación matemática con tecnología» nos recuerda los ambientes organizativamente complejos de los centros escolares. En su escrito describe un proyecto con uso de tecnología (TIC) desarrollado con un grupo de alumnos de «atención a la diversidad» a quienes se piden actividades de interpretación de la información que ellos mismos han recogido. Núria Iranzo y Núria Planas, en «Las preguntas en la clase de matemáticas de secundaria», también se refieren a la «atención a la diversidad». En su texto defienden que un buen currículo matemático es aquel que resulta adecuado para todos los alumnos, independientemente de las expectativas que la escuela deposite de antemano en cada uno de ellos. Para estas dos autoras, promover la participación, trabajar competencias de pensamiento crítico, construir conocimiento a partir de preguntas de alumnos, verbalizar contrastes, planificar estrategias de diversificación o introducir materiales manipulables son orientaciones útiles para todas las clases. La actividad ilustrada acerca de los envases de un refresco es un ejemplo de cómo convertir ejercicios rutinarios sobre geometría y medida en problemas abiertos.

Todos los textos se sitúan en el aula; hablan de profesores fomentando debates sobre cuestiones matemáticas miradas en contextos cotidianos. Son experiencias que resaltan el carácter social del trabajo del profesorado de matemáticas cuando busca formas de interesar al alumnado. En el trabajo en grupo, lo social también es visto como una característica de los procesos de pensamiento matemático. Los alumnos trabajan con otros alumnos que proyectan intereses parecidos a los suyos (en la selección de un tema para un trabajo de estadística, en la identificación de una ruta para la búsqueda de frisos, en el establecimiento de hipótesis sobre las estrategias de publicidad de una empresa, etc.). El profesor de matemáticas ayuda a planificar la investigación, a llevarla a cabo, a presentar conclusiones y a evaluar los resultados. Este enfoque concede al alumnado un papel activo en la resolución de dificultades y en la toma de decisiones. Se entiende que la autonomía del alumnado tiene que ver con la capacidad del profesorado para orientar pero también con las posibilidades de colaboración entre iguales. El «safari fotográfico» por parejas del que nos habla Joan Jareño en «Estudiar frisos: Una forma de observar el entorno», es una forma de crear un entorno de aprendizaje entre iguales.

Núria Iranzo y Núria Planas hablan de estimular la formulación de buenas preguntas, de enseñar a los alumnos que una de sus tareas como aprendices es precisamente hacer preguntas. En «El diálogo en el aula de matemáticas como comunidad de prácticas», Xavier Vilella también se refiere a las preguntas de los alumnos para mostrar evidencias del aprendizaje matemático y fomentarlo. El pensamiento matemático requiere generar buenas preguntas que pongan de relieve situaciones de duda, dificultad y bloqueo ante la resolución de una tarea. Interpretar dudas, dificultades y bloqueos como puntos de partida de la formulación de preguntas es una manera adecuada de desdramatizar este tipo de situaciones y de avanzar en la construcción de conocimiento matemático. Las preguntas no son frecuentes en el aula de secundaria, a diferencia de lo que ocurre en etapas anteriores ya que no siempre se asocian a procesos de pensamiento reflexivo y, a menudo, se consideran como señales de desorientación en quien las plantea.

En «Estudio de cónicas a través de actividades manipulativas», Anton Aubanell analiza ejemplos de contenidos matemáticos que pueden representarse con materiales manipulativos. Xavier Vilella también se refiere a la importancia del uso de materiales en el aula de matemáticas. Ambos autores proponen el uso de objetos cotidianos (lápiz, cordel, dado...) y en la experimentación guiada para la resolución de problemas y la construcción de modelos. La actitud investigadora, la curiosidad por lo que nos rodea, el respeto por las propias representaciones y las de los otros y el buen uso de los materiales posibilitan un ambiente de aprendizaje rico y motivador. Los argumentos para apoyar el uso de materiales en la educación secundaria son muy parecidos a los usados en la educación infantil y primaria. Aunque la acción sobre los materiales no es por ella misma suficiente, conviene llevar a cabo actividades manipulativas que unan la acción con la representación de la acción y con su verbalización. Mientras se anima a los estudiantes a utilizar geoplanos, regletas numéricas y tangrams, también hay que enseñar cómo realizar la transición hacia actividades con papel y lápiz. De lo contrario, los estudiantes pueden acabar ubicando por separado unas y otras actividades.

El uso de materiales, o la referencia a ellos, acostumbra a ir acompañado del desarrollo de la dimensión estética de la actividad matemática. Joan Jareño, en su estudio de los frisos, señala la importancia de vincular el aprendizaje de las matemáticas con un sentido estético. Este sentido estético puede asociarse a representaciones artísticas en arquitectura y diseño, pero también, tal como hace Xavier Vilella, a la lectura de cuentos y otros textos literarios en el aula de matemáticas. Núria Iranzo y Núria Planas, con su propuesta de crear cuerpos geométricos de diferentes formas con un mismo volumen, sugieren el desarrollo de un cierto sentido estético en la resolución de una tarea matemática. También hay sentido estético en la elaboración de las presentaciones que Pili Royo pide a sus alumnos; y en la representación de las cónicas como envolventes de familias de rectas que nos muestra Anton Aubanell.

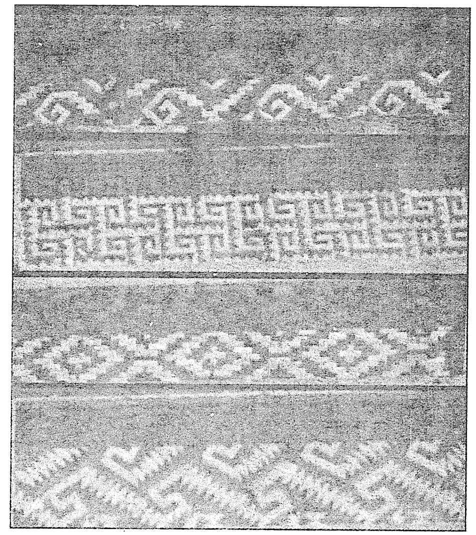
La lectura de las experiencias de otros profesores es una buen punto de partida para iniciar una reflexión sobre la propia práctica docente: ¿En qué medida usamos actividades manipulativas en nuestras clases?, ¿cuánto tiempo dedicamos a situaciones de diálogo y preguntas?, ¿cuántas excursiones desde el área de matemáticas organizamos?, ¿qué objetos de la vida cotidiana llevamos al aula?, ¿cómo normalizamos el uso de la tecnología en clase de matemáticas?, etc. La reflexión es un impulso para la acción y un modo de revisar la acción cuando los resultados no son los esperados. Para los profesores que escriben sus experiencias de aula, escribir ya constituye un paso de una primera reflexión ocasional a una práctica reflexiva más profunda.

Observación del entorno por medio del estudio de frisos

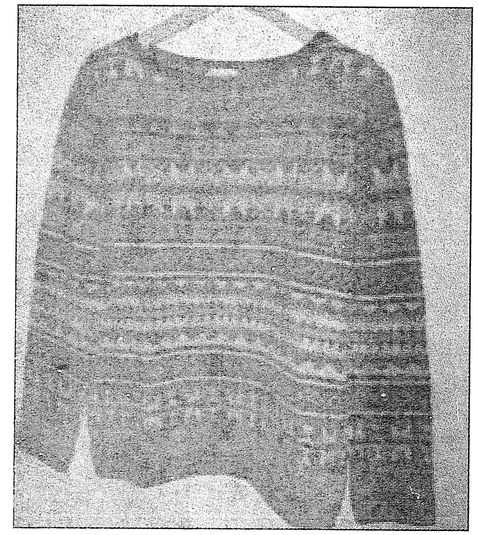
Joan Jareño
IES Alella. Alella (Barcelona)

Uno de los objetivos de la actividad es procurar que el alumnado descubra la geometría escondida en elementos decorativos presentes en su entorno próximo. El interés humano por los objetos de adorno y el adorno de los objetos son casi tan antiguos como la humanidad misma. Desde épocas muy tempranas, la repetición iterativa de un motivo más o menos sencillo, lo que llamamos una cenefa o greca, es un recurso ornamental utilizado de manera profusa en la cerámica y en los tejidos. Lo encontramos en todas las culturas por mínimo que sea su nivel de desarrollo tecnológico; en las más avanzadas, las cenefas se utilizan, además, en el adorno de edificios: las llamaremos frisos y las encontraremos esculpidas en piedra, pintadas en pare-

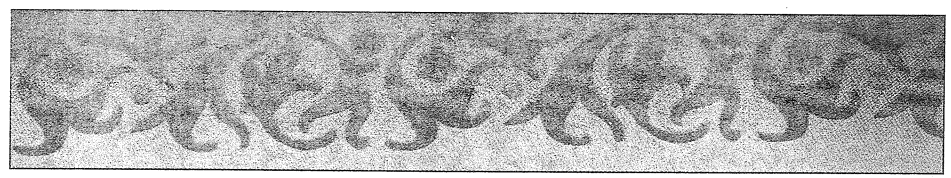
Frisos zapotecas de Mitla (México)



Cenefas en un jersey



Friso modernista de la fachada de la Torre Serra-Xaus de Sant Joan Despí (Barcelona)



des o azulejos o en todo tipo de molduras. También podemos descubrir frisos de gran interés en los enrejados de hierro de puertas, ventanas y balcones. Todavía hoy es uno de los recursos decorativos más utilizados y, por tanto, fáciles de encontrar y observar.

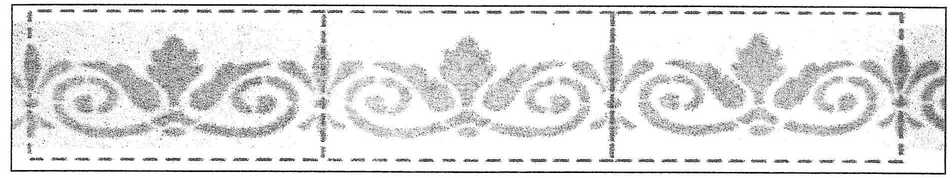
Antes de iniciar la descripción de la experiencia, no puedo dejar de mencionar los dos textos que han inspirado gran parte del trabajo, Passeig matemàtic per Catalunya (Ticó, 2004) y Calados canarios y matemáticas (Balbuena, de la Coba y García, 2000). Para esta experiencia, son igualmente importantes los libros Ritmos. Matemática e imágenes (Borrás y otros, 2002) y el siempre sugerente Materiales para construir la geometría (Alsina, Burgués y Fortuny, 1991).

Desarrollo de la experiencia

Las actividades sobre frisos que resumiré se llevaron a cabo con alumnado de 2.º curso de ESO del instituto de Alella, una población cercana a Barcelona, en un contexto de trabajo geométrico en el aula asistido con ordenador. El trabajo que se describe ocupó unas cinco o seis sesiones (dependiendo del ritmo personal de cada alumno). En este tiempo no se incluyen las actividades de identificación en el entorno de Alella que se realizaron fuera del horario escolar. En esta descripción no detallamos cuestiones relacionadas con criterios de clasificación y nomenclatura de frisos. La intención del escrito no es dar toda la información a fin de que pueda reproducirse con exactitud la experiencia, sino más bien ilustrar los rasgos generales de un trabajo escolar basado en el desarrollo de una mirada estética y matemática orientada hacia aspectos de la realidad, desde el convencimiento que este trabajo puede orientar nuevas prácticas. Junto con la mía, pueden consultarse otras páginas web para completar el trabajo sobre frisos, entre ellas:

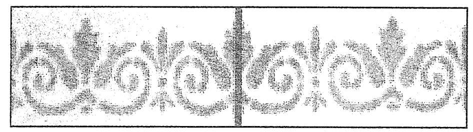
- *www.xtec.cat/~jjareno* (Calaix +ie)
- *http://usuarios.lycos.es/acericotri/celosiin.htm*
- *http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/celosias/index.htm*
- *http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/frisos/frisos.htm*

En general un friso es un adorno dibujado entres dos líneas paralelas. Las líneas que enmarcan el friso han de ser rectas, pero se observan a menudo cenefas curvas como las que rodean las puertas de muchas iglesias románicas o góticas. Imaginándolas rectas, podemos aplicar muchas propiedades de los frisos rectos a estas cenefas curvas. Si el adorno es un dibujo que se repite idéntico a lo largo del friso hablamos de un friso periódico, y llamamos patrón del friso al fragmento que se repite. Este patrón se repite sucesivamente aplicándole una translación respecto a un vector que es igual a la anchura del motivo y que tiene la misma dirección que el friso.

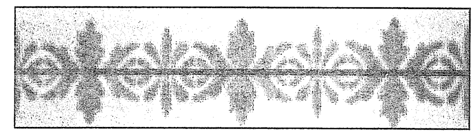


Uno de los aspectos más interesantes que estudiar de los frisos, y que sirve para clasificarlos, son los movimientos (giros y reflexiones) que los dejan invariantes.

Simetría vertical (invariante)

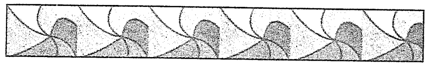
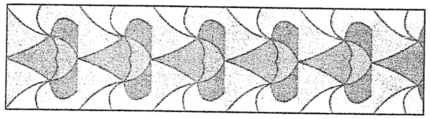
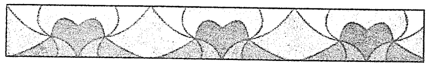
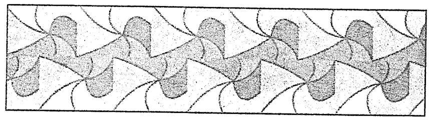
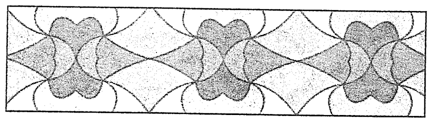
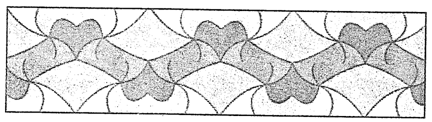


Simetría horizontal (no invariante)



En clase se había realizado una actividad anterior en la que se estudiaba los movimientos invariantes en rosetones, logos, cúpulas y tapacubos de coches, después se procedía a su clasificación y a la práctica de diseños a partir de ellos. No es una fase previa necesaria pero agilizó bastante el desarrollo del trabajo con frisos.

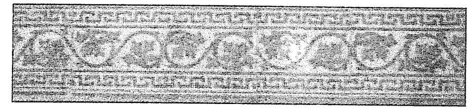
Al inicio de la experiencia dimos a conocer la clasificación de los tipos de frisos con ejemplos y explicaciones que facilitaran la comprensión de los contenidos matemáticos relacionados. De la combinación de los cuatro movimientos que pueden dejar invariante un friso (giro de 180º, simetrías horizontal, vertical y con deslizamiento) se observa que finalmente sólo hay siete frisos existentes posibles. Esto significa, y he aquí uno de los motivos de interés por trabajar esta cuestión en el aula, que cualquier friso o cenefa que encontremos en nuestro entorno puede clasificarse en uno de estos siete tipos. Los ejemplificamos a continuación a partir de los diseños de una alumna de 2.º de ESO que anotó qué movimientos dejan invariante a cada caso:

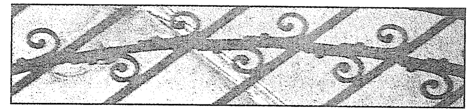
	Friso que no admite ninguna invariancia por giros ni simetrías
	Friso con giro invariante
	Friso con simetría horizontal
	Friso con simetría vertical
	Friso con simetría con deslizamiento
	Friso con giro, simetría horizontal y simetría vertical
	Friso con giro y simetría vertical

Las explicaciones sobre la clasificación de frisos se hicieron mediante animaciones preparadas en las que se podían observar los movimientos aplicados de forma dinámica. Las ejemplificaciones animadas, en forma de película revisable, superan en calidad y claridad a las que se pueden hacer en papel o en la pizarra y, además, acostumbran a generar una mayor expectación entre el alumnado. Una vez estudiados los movimientos y los tipos de frisos, se clasificaron los primeros frisos utilizando el propio ordenador a partir de ejemplos interactivos y autocorrectivos, que permitían aplicar con facilidad giros y simetrías a las cenefas que había que clasificar. La manipulación de las imágenes de los frisos (giros y simetrías) se puede hacer fácilmente también sustituyendo los ejemplos interactivos, con cualquier programa de tratamiento de imágenes, ya que, por sencillo que sea, siempre incluyen las opciones de giro o reflexión.

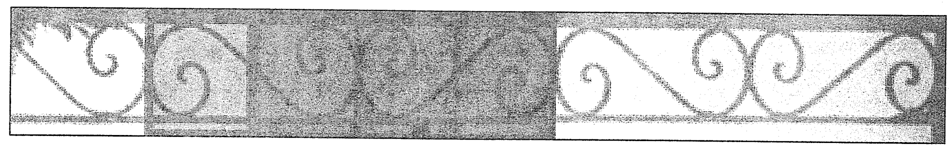
Posteriormente, se mostraron frisos a los que no se les permitía el movimiento; se tenían que «mover a ojo», con el objetivo de empezar a educar la vista en el descubrimiento de invariancias. Paralelamente se pidió a los alumnos que, en pequeños grupos, iniciaran un «safari fotográfico» por la localidad buscando frisos en decoraciones de interiores, patios, fachadas, en enrejados de ventanas, puertas y balcones, etc. Se pretendía que capturasen la máxima variedad de tipos de frisos para luego confeccionar murales clasificando las fotografías realizadas. Así pudieron descubrir que algunos tipos sobreabundan, mientras que otros son escasos, como los que presentan simetría de desplazamiento.

Un par de frisos capturados en Alella

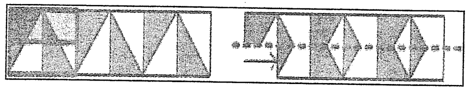




Una vez clasificados se procedió a descubrir el motivo mínimo de algunos de los frisos. Dicho motivo mínimo es el fragmento más pequeño a partir del cual se puede reproducir el friso completo. Si anteriormente hemos dicho que el patrón de una cenefa es el diseño que se repite por traslación, el motivo mínimo puede ser un fragmento de éste. De hecho, en la mayoría de casos, el patrón se construye a partir de la repetición del motivo mínimo aplicándole adecuadamente giros y simetrías. En el siguiente ejemplo se visualiza un patrón con su motivo mínimo (que es 1/4 del mismo):

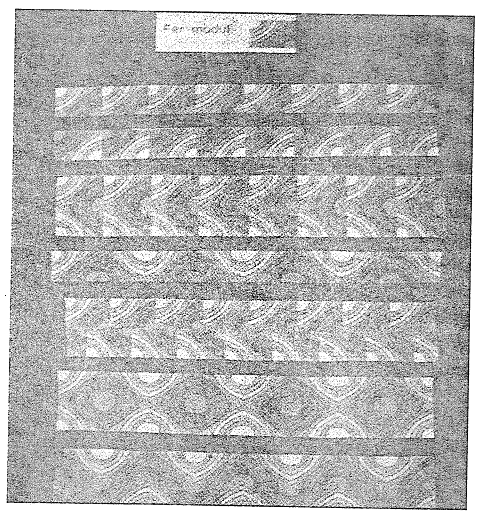


Una vez familiarizados con los diferentes tipos de frisos se pasó a la fase de creación de cenefas propias. Es muy cómodo construir frisos utilizando programas de dibujo vectorial como Flash, Coreldraw, Freehand o Inkscape (éste último gratuito). Cada alumno diseñó un módulo propio que, conveniente repetido con copias giradas o reflejadas del mismo, le permitió construir sus propios frisos. El trabajo se dirigió dando instrucciones precisas de cómo colocar las piezas modulares para que se obtuvieran los siete frisos posibles. Las cenefas que hemos visto anteriormente para ejemplificar los tipos de frisos se diseñaron de esta manera.



No es la única forma de realizar esta fase de creación de frisos. En vez de dirigir la colocación de módulos podemos permitir que los unan libremente hasta constituir un grupo que se repetirá para formar el friso. Se deberán, sin embargo, poner restricciones. Por ejemplo, es conveniente investigar las posibilidades existentes uniendo sólo dos módulos, forzosamente diferentes, en forma horizontal o vertical. Si la primera pieza del grupo es el módulo «normal» (sin giros ni simetrías) se obtienen seis casos diferentes y cinco tipos de frisos: los que tienen un único movimiento invariante. En el ejemplo del dibujo con un módulo «normal» (el tradicional azulejo cuadrado con dos mitades diagonales de diferente color) y otro al lado con simetría horizontal se obtiene, sorprendentemente, un friso con simetría deslizante. Se observa que el motivo mínimo no coincide con el grupo de módulos sino que es su mitad superior.

La investigación se puede extender al estudio de los frisos construidos con un grupo de 4 módulos, también todos diferentes (uno normal, uno con giro, otro con simetría horizontal y otro con simetría vertical), organizándolos en rectángulos de 1x4, 4x1 y 2x2. Hay 18 casos posibles (si el primero es, de forma fija, el «normal»). Aparecerán los siete tipos de frisos, incluso los frisos sin invariantes. Después de la fase libre de diseño de frisos a partir de las combinaciones de 2 o 4 módulos se puede proceder a clasificarlos. Esta propuesta de diseño libre puede hacerse con piezas recortadas en papel; sólo será necesario fabricar dos juegos de módulos: uno «normal» y otro con una simetría horizontal o vertical, ya que girándolos obtendremos los otros dos módulos (el simétrico que falte y el girado 180º). Finalmente, con las dos líneas de trabajo, la más orientada y la más libre, podremos organizar una interesante exposición de frisos, de la que mostramos una imagen.



Esta exposición es un modo de hacer públicos fuera del aula los procesos creativos del alumnado y de comunicar a otros grupos formas alternativas de hacer matemáticas. Los distintos frisos elaborados son el resultado final de haber puesto en marcha maneras de trabajar las matemáticas que integran el desarrollo de competencias matemáticas (en torno a conceptos geométricos que requieren la activación de sofisticados procesos de visualización) con el desarrollo de competencias de expresión artística, en un marco global de conocimiento del entorno más cercano. Los frisos, en tanto que productos diseñados por el alumnado muestran lo que se ha comprendido y lo que se es capaz de hacer como consecuencia de un período de aprendizaje centrado en la representación artística de contenidos geométricos.

Sobre los alumnos

Cada fase de la experiencia movió aspectos diferentes de la receptividad del alumnado. El trabajo inicial con ordenador, diseñado básicamente con explicaciones y unas primeras prácticas autocorrectivas, favoreció la autonomía personal. Algunos de los conceptos nuevos, como el de simetría con deslizamiento, fueron más difíciles de asimilar; pero uno de los síntomas del interés que la actividad despertó fue el de observar cómo se enfrentaban a estas dificultades con ánimo de superación y cómo se ayudaban compartiendo soluciones, interpretaciones o propuestas. Sabemos que una de las visiones adulteradas que nuestro alumnado tiene de las matemáticas es la importancia del resultado sobre el proceso de resolución, así como la máxima exactitud de éste (por ejemplo 5,7 es menos exacto que 5,6999...). Esta circunstancia bloqueaba respuestas de clasificación de frisos porque, aunque se trabajaba con fotografías de objetos reales que siempre presentan alguna irregularidad, los alumnos les exigían una superposición y coincidencia perfecta para admitir el movimiento como invariante. La actividad ayudó por tanto, aunque de forma colateral, a observar que aunque la matemática es a menudo una abstracción idealizada de la realidad, cuando la aplicamos al estudio directo de la misma nos tenemos que dotar de «márgenes de tolerancia».

La fase de búsqueda de frisos en el entorno fue una de las más motivadoras, ya que se salía del modelo habitual de demandas que se les hacen desde el área de matemáticas. Aquí, de nuevo, tuvieron que enfrentarse a los márgenes de irregularidad que la observación de la realidad directa impone. Hasta que no aceptaron captar fragmentos de frisos o prescindir de ciertas «interferencias» de diseño, la «caza» de cenefas se les presentó más infructuosa de lo que inicialmente esperaban.

Una de las fases de la actividad que se realizó con más entusiasmo fue, sin duda, la de creación de frisos. La posibilidad de experimentación rápida que permiten los programas de diseño gráfico facilitó que se pudieran probar de forma ágil diferentes diseños de módulos y el efecto que tenían los cambios en el conjunto del friso. Los resultados finales proporcionaron un alto grado de satisfacción individual y colectiva (ya que todos los frisos fueron objeto de una exposición conjunta). Se tiene que pensar bien la opción que se va a escoger en cuanto al diseño: libre o dirigido. Cada una tiene sus ventajas y sus inconvenientes. Aquí optamos por el modelo orientado que garantizaba la obtención de todos los frisos. No significó eso que no aparecieran dificultades en la comprensión y seguimiento de las instrucciones de colocación de los módulos. El diseño con colocación libre de los módulos, si bien puede favorecer la diversidad de estilos de cenefas obtenidas, comporta una nueva práctica de clasificación de frisos, cosa que han hecho ampliamente en las dos primeras fases y puede dar una cierta sensación de repetición; además, si no se hace un estudio búsqueda sistemática, no se garantiza la obtención de los siete tipos existentes.

A lo largo de la actividad descrita se habrá podido observar la gran riqueza del trabajo matemático desarrollado por el alumnado: observación y aplicación de movimientos en el plano, estudio de algoritmos de clasificación y diseño, combinatoria (si se opta por el estudio de diseño de frisos agrupando módulos)... Pero, por encima de todo, habremos tendido puentes entre arte y geometría, entre artesanía y matemáticas. Además, posibilitaremos un cambio en la percepción matemática que se tiene del entorno próximo al invitarnos a observarlo con más detenimiento y descubriendo los variados, y muchas veces bellos diseños de artesonados, enrejados, mosaicos, pinturas, dibujos en tejidos, etc., que nos rodean.

El currículo de matemáticas en la etapa de secundaria obligatoria está repleto de contenidos complejos que todos los alumnos y alumnas han de aprender, y no todo el mundo se enfrenta o se puede enfrentar a ellos de la misma forma. Una solución frecuente y relativamente fácil de adoptar es la adecuación simple de los contenidos, pero no es la única posible. Otra puede ser la de realizar propuestas de trabajo suficientemente estimulantes como para conseguir la implicación personal de cada alumno en su proceso de aprendizaje, y el sentimiento positivo de participar en un proyecto colectivo. Con todo ello avanzaremos un paso más hacia que nuestro alumnado sienta las matemáticas como algo más cercano.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J.M. (1991): *Materiales para construir la geometría.* Madrid. Síntesis.

BALBUENA, L.; COBA, D.; GARCÍA, E. (2000): «Calados canarios y matemáticas». *Suma-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*, 35, 5-13.

BORRÁS, E. y otros (2002): *Ritmos. Matemáticas e imágenes.* Madrid. Nivola.

TICÓ, T. (2004): *Passeig matemàtic per Catalunya.* Lleida. Pagès Editors.

El diálogo en el aula de matemáticas como comunidad de prácticas

Xavier Vilella
IES Vilatzara. Vilassar de Mar (Barcelona)

En la educación secundaria obligatoria (ESO) existe una tradición consistente en el trabajo estricto por departamentos, es decir, por asignaturas. La realidad, compleja, se presenta al alumnado desgajada en pedazos sin conexión evidente: se pretende enseñarles a analizar el mundo, a conocerlo, a asimilarlo, desde cada pedazo y lo que se consigue dista mucho de lo óptimo. En algunos centros y áreas, de forma minoritaria, existen intentos de cambiar el enfoque de la situación e ir hacia una enseñanza que muestre la realidad tal como es y que no subestime la capacidad del alumnado para aprenderla. Este camino de mejora desarrollaría las diversas competencias, incluida la competencia «democrática» de la que habla Skovsmose (1999), y les prepararía mejor para afrontar los retos de su vida futura.

La experiencia se basa en dos premisas: en primer lugar, el alumnado es capaz de afrontar la complejidad de la realidad que le rodea, hasta un nivel más alto del que habitualmente se cree; en segundo lugar, el profesorado debe plantear tareas de un cierto tipo y gestionarlas de una cierta manera para facilitar lo anterior.

La primera premisa lleva a proponer tareas en contexto, con una complejidad controlada cercana a la realidad. Así damos la oportunidad al alumnado de mostrar su capacidad para afrontar el reto y para desarrollar su competencia en terrenos parecidos a los que en el futuro puede encontrarse, y en los que debe sentirse cómodo, reconociéndolos. En estos contextos, el reto es la clave de la educación crítica: sólo con retos puede tener sentido opinar, participar y ser crítico (Planas, 2007).

La segunda premisa conduce a plantearnos si debemos seguir un libro de texto, que propone tareas cerradas y, a menudo, muy técnicas –en el sentido de mecánicas–, o bien podemos abordar tareas ricas que puedan desarrollarse por caminos diversos, y dar oportunidades de trabajo en el aula para todos. En este último caso, es preciso que la gestión de la tarea por parte del profesorado sea comedida y abandone las prisas desmesuradas; conviene dejar su tiempo al alumnado para ir creando significados, negociando representaciones, debatiendo argumentaciones, y facilitar la co-construcción del conocimiento matemático. Ello nos lleva a la creación de una comunidad de prácticas en clase, sobre la base del diálogo, la argumentación, el debate y el trabajo cooperativo. Crear una comunidad de prácticas pide su tiempo. Arcavi (2007) afirma que demasiado a menudo se acortan los procesos de discusión y resolución de problemas en el aula para evitar la sensación de tarea no finalizada en el profesorado.

Finalidades

Se persiguen dos tipos de objetivos:

1. Facilitar un aprendizaje básico, introductorio, del azar y la probabilidad en alumnos de 12 años.
2. Desarrollar competencias básicas del alumnado, tanto la competencia matemática como las transversales.

Los objetivos más cognitivos se relacionan con la materia que se va a enseñar. La secuencia sería aproximadamente: partir de la idea intuitiva de hecho seguro-hecho imposible, para situar lo probable; pasar a cuantificar casos sencillos (empezando a definir la media aritmética o las frecuencias absoluta y relativa); experimentar con el lanzamiento de dados (relacionando representaciones como la tabla o el gráfico); y terminar con una implícita ley de Laplace y casos más complejos. La gestión de la actividad será clave para el desarrollo de competencias. El profesorado debe establecer las normas sociales y de la práctica matemática en clase; dejar claro el papel del error (fuente de aprendizaje, oportunidad para mejorar y descubrir puntos débiles de nuestro razonamiento permitiéndonos estar más preparados para momentos futuros en los que ya no se tratará de un entrenamiento, como ocurre en la escuela); establecer el camino preferido en clase para la validación de la verdad matemática (basado en el diálogo y la argumentación de ideas); y organizar el trabajo cooperativo en grupos.

Bishop (1999), abordando el tema de la construcción de significados en el proceso de enculturación matemática, considera que el significado matemático se logra estableciendo conexiones entre la idea matemática que se discute y el conocimiento del individuo. En el aula esto se traduce en dos aspectos: en primer lugar, el proceso de estimular la actividad de compartir y contrastar ideas; y en segundo lugar, la conformación de las explicaciones matemáticas, en que el objetivo negociador del profesor debería ser fomentar la comparación y el contraste de explicaciones para un mismo fenómeno. Defiende además la necesidad de que todos los niños participen en la construcción social de significados, proponiendo un ritmo de comunicación que permita a los alumnos poner en orden significados compartidos y solucionar desacuerdos.

El azar: fracciones, decimales, porcentajes en contexto

Esta unidad es la primera que se da en 1.º de ESO. La decisión de hacerlo así se tomó en el departamento de matemáticas porque queríamos ofrecer al alumnado que llega de primaria un tema aparentemente muy diferente de lo que ha dado en el 6º curso del tercer ciclo de primaria. La entrada en el instituto no puede consistir en darles más de lo mismo, no es una buena estrategia para la motivación. Si ojeamos los libros de texto podremos ver que empiezan con los números naturales, operaciones y propiedades; la divisibilidad (con los consabidos mínimo común múltiplo, máximo común divisor...), números enteros, etc. No se acierta a ver ningún intento de mostrar las matemáticas de otra manera, las matemáticas útiles para entender nuestro mundo, para afrontar y resolver problemas reales. Por otro lado, los alumnos poco hábiles en matemáticas constatarán que no tienen nada que hacer desde el primer día, porque es lo mismo en lo que ya fracasaron en primaria pero más difícil. En cambio, una temática nueva y con conexiones con la vida real sugiere oportunidades para todos.

La segunda razón para empezar el primer curso con este tema proviene del hecho de que el tema de azar y probabilidad, al estar situado generalmente al final del libro de texto, no se llega a dar. Para nuestro departamento resulta poco justificable esta decisión: quizá no se considera el estudio del azar y la probabilidad como fundamental para el futuro de la ciudadanía, a pesar de su relación con el correcto análisis de realidades como las predicciones del futuro, con cartas astrales, esoterismos, tarots, bolas de cristal, o las apuestas bajo diversas formas: máquinas tragaperras, loterías, sorteos, dados, trampas en el juego, e incluso la ludopatía, mucho más presentes en la vida de parte de nuestro alumnado de lo que habitualmente creemos.

Esta unidad incorpora el uso de materiales, la experimentación, la toma de datos, la tabulación y la representación gráfica usando medios informáticos. Por otro lado, nos ofrece una oportunidad de trabajar las fracciones en contexto. Para un alumno de 12 años no resulta sencillo darle sentido al trabajo con fracciones como 4/52 o 3/7. El hecho de que la fracción sea un buen medio para representar la probabilidad en una situación determinada permite facilitar la construcción de significados para fracciones poco habituales: en el primer caso, 4 de 52 puede representar la probabilidad de extraer un as en una baraja francesa; en el segundo, 3 de 7, la de extraer una bola negra de una bolsa en la que tenemos 7 bolas, de las que 3 son negras y las demás de otros colores. Podemos dar significado a la equivalencia de fracciones, diferenciándola de la igualdad estricta, puesto que dos fracciones equivalentes representan situaciones reales distintas, aunque el valor de su probabilidad sea el mismo.

Cuando nos adentramos en el estudio de situaciones más complejas, podemos ofrecer al alumnado la posibilidad de comprobar operaciones entre fracciones, dado que el resultado puede ser deducido del contexto y la operación es un camino más para obtener el resultado pero no el único. Por ejemplo, en una máquina que deja caer bolitas por un tubo, y este tubo se bifurca, y uno de los dos ramales se bifurca nuevamente mientras que el otro no, si se pide la proporción de bolitas que esperamos lleguen a cada uno de los finales de tubo, puede deducirse que será la cuarta parte, la cuarta parte y la mitad. Ahora podemos comprobar el producto de fracciones, puesto que 1/2 · 1/2 nos da en dos ramales 1/4. Podemos construir esta máquina y comprobarlo experimentalmente.

Experimentación

La experimentación en esta secuencia consiste en lanzar individualmente 120 veces un dado (véase imagen 1) y tabular los resultados. Esta operación no es tan simple como se podría pensar ya que en matemáticas se experimenta poco. Algunos alumnos cometen errores tan simples como lanzar los dados más o menos veces de 120 (véase imagen 2). Aquí se pone de manifiesto la capacidad de ser perseverantes, dado que la alegría del comienzo da paso al tedio de la repetición. Desde el punto de vista competencial es importante llevar a cabo experiencias de este tipo, porque son parecidas a la realidad de la investigación, donde escasean los momentos emocionantes y domina una cierta monotonía en la tarea del investigador, que no debe bajar la guardia si desea evitar errores. Una vez detectado el error, el alumno debe retroceder y rectificarlo, lo que le enseña que correr mucho y errar conduce a tener que volver sobre sus pasos y rectificar.

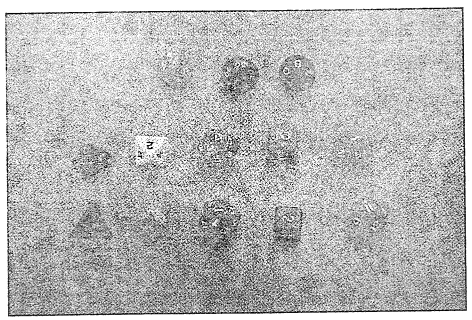


Imagen 1. Los dados de juegos de rol son conocidos por nuestro alumnado y permiten trabajar con fracciones del tipo 3/20, 3/4, 3/8, 5/12, etc., en un contexto que les da significado. Además, ahí están los sólidos platónicos, si se desea entrar en geometría.

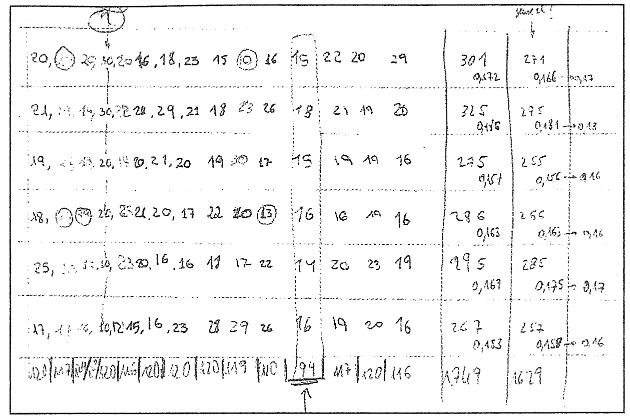


Imagen 2. En este papel se recogen resultados de diferentes alumnos (en las columnas). Un alumno ha realizado sólo 94 lanzamientos del dado, cuando debían ser 120. En otro caso, los resultados son totalmente sospechosos (columna con un interrogante en la parte superior).

Creación de la comunidad de prácticas

El tema avanza siguiendo el esquema que se presenta:

Cuadro 1

TAREA PLANTEADA	DINÁMICA EN EL AULA	APRENDIZAJES CLAVE
¿Hechos casuales o previsibles?	Reflexión individual y debate en gran grupo.	Acuerdo respecto al enunciado y en los significados.
Entre lo imposible y lo seguro, lo probable.	Reflexión individual, acuerdo en pequeño grupo y debate en gran grupo.	Constatación de la ventaja de disponer de alguna representación numérica de la probabilidad.
Estudio: ¿existe la suerte al lanzar un dado?	Formulación de hipótesis inicial (creencia en la suerte). Experimentación individual, tabulación de resultados, cálculo de la frecuencia absoluta y relativa (decimales hasta las milésimas), representación gráfica de la frecuencia relativa en función del número de tiradas.	Fase inicial individual de aprendizaje de técnicas de recuento, tabulación y representación, noción de frecuencia, *F* y *f*. Discusión sobre el número de decimales. Descubrimiento de la evolución de los resultados según aumenta el número de tiradas.

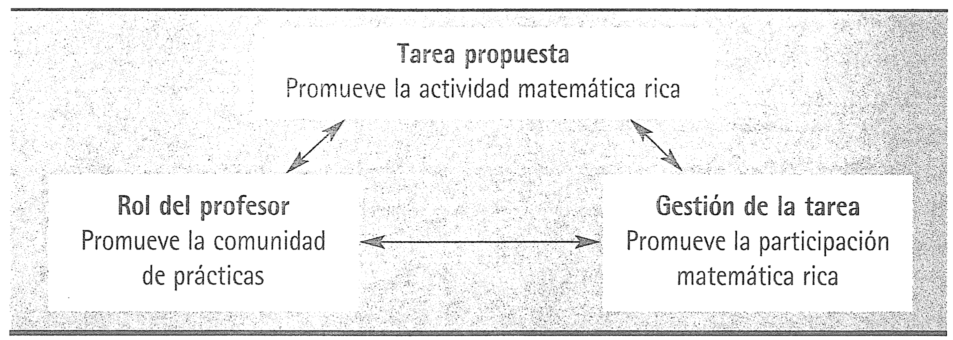
TAREA PLANTEADA	DINÁMICA EN EL AULA	APRENDIZAJES CLAVE
	Puesta en común de datos de toda la clase, tabulación y representación usando medios informáticos, y debate en gran grupo.	Coincidencia en la evolución de los valores de *f*, cuando aumenta el número de tiradas induce a revisar la hipótesis sobre la suerte.
Ordenando acontecimientos según su probabilidad.	Reflexión individual, puesta en común en pequeños grupos y en gran grupo.	Trabajo de la ordenación de fracciones, decimales y porcentajes en contexto.
Visualizando fracciones, visualizando probabilidades.	Reflexión individual y debate en gran grupo.	Necesidad de representar de diferentes formas las fracciones y desarrollo de formas de representación.
Representación en la recta numérica.	Tarea en pequeños grupos y puesta en común conjunta.	De la ordenación de fracciones a la representación como puntos de la recta.
Probabilidades iguales de acontecimientos distintos.	Reflexión individual y puesta en común en gran grupo.	De las probabilidades del mismo valor a partir de diferentes situaciones a la fracción equivalente.
Situaciones que se complican.	Reflexión individual, consenso en pequeños grupos y debate en gran grupo.	Operaciones sencillas entre fracciones que pueden ser comprobadas en contexto.
Creación de enunciados.	Propuestas individuales y debate en gran grupo.	Creación de enunciados para situaciones resueltas.
Representación de una historia.	Preparación individual y debate en gran grupo.	Debate conjunto disponiendo de la proyección en pantalla de los trabajos escaneados.

Cada avance competencial en el aula de matemáticas se basa en un trabajo cíclico en tres planos: reflexionar individualmente, compartir y comparar. El eje del avance es el diálogo entre iguales, una vez cada cual fija su posición de partida en la reflexión individual; un diálogo constructivo, en el que

se negocian significados y se llega a un consenso también en lo que se refiere a determinar quién acierta y quién se equivoca. Estos ciclos de debate van formando una conciencia de grupo, una identidad, y se va creando un sello propio compartido. Este ciclo puede contribuir a que el alumnado comprenda que el resultado final no se puede adjudicar a la reflexión individual porque refleja las aportaciones de todos. Se está desarrollando una comunidad de prácticas en el aula. El cuadro 2 representa la situación: en los vértices ponemos los elementos clave (tarea propuesta, gestión de la actividad y rol del profesor) y lo que promueven.

Esta comunidad se basa en qué se comparte y cómo: se aprenden matemáticas de forma colectiva, en un intercambio de opiniones, sin miedo a errar, porque se sabe que de la comunidad saldrán opiniones críticas, y en éstas confiamos para que el resultado del debate no sea un error. Aunque así fuera, sería un error compartido, que los miembros de la comunidad no han detectado. Siempre existirá el filtro final del profesor, que atiende a todos cuando lo piden, pero que se reserva durante el proceso para dejar espacio a la negociación. Cada persona encuentra su lugar, en función del grado de implicación y de su desarrollo competencial. Alumnos poco participativos en las primeras sesiones van entrando en el juego de la negociación cuando comprueban que los errores no se castigan, que las intervenciones no se juzgan según quien las hace y que opiniones que pueden parecer alejadas del resultado final son de gran utilidad. Aquí se da un elemento importante: el compromiso mutuo. La tarea pasa a ser una cuestión de todos. Parte del trabajo del profesor es destacar este aspecto, una vez finalizado el debate en gran grupo. Los debates desarrollan la capacidad de argumentación en términos matemáticos, poco trabajada, en general. Es

Cuadro 2



una argumentación que no pretende deslumbrar a los poco hábiles o competir entre los más hábiles, sino que se dirige a conseguir un producto final consensuado y de calidad que satisfaga a todos.

Además de desarrollar la capacidad de argumentación, también se facilita un ambiente en el que pueda desarrollarse la capacidad de escuchar a los demás. En los debates en gran grupo, una vez se ha reflexionado individualmente y se ha debatido en pequeño grupo, no se puede argumentar sin compartir y comparar lo que uno piensa con lo que otro está argumentando. Las intervenciones se vuelven más maduras y profundas cuanto más se practica este ciclo dialógico. Y de ello se percatan los alumnos, puesto que comprueban una y otra vez que la intervención directa del profesor ha sido muy reducida, y que el secreto está en realizar un buen debate.

Esquemas a partir de un cuento

Se presenta al alumnado el cuento «Los relatos de Gudor Ben Jusá» (de Burgos, 1994). La tarea empieza en clase con la lectura en voz alta, resolviendo las dudas que puedan surgir sobre el vocabulario y la historia en sí. Generalmente se comprende bastante bien y no aparecen muchas preguntas. Se pasa a la preparación de un esquema individual que se recoge al acabar la sesión. El profesor los escanea y prepara una presentación con ellos. En la sesión siguiente se muestran a todo el grupo y se debaten uno por uno, atendiendo a criterios que se establecen entre todos antes de empezar la proyección. Estos criterios siempre se relacionan con el contenido esencial del relato, la esquematización conseguida, la claridad en el aspecto formal, y la comunicación correcta del desarrollo de la historia. En las imágenes 5 y 6 tenemos algunos de ellos.

Cuando los alumnos trabajan con sus representaciones de ideas matemáticas, y esto se respeta en el aula, se genera un ambiente de confianza, motivación, mayor autoestima y participación. Estas representaciones, incluso con errores, se valoran por parte del profesor, y se confía en que el diálogo entre iguales, el debate en pequeño y en gran grupo, irá induciendo su evolución hacia representaciones que serán compartidas y que se acercarán a las más habituales, las que históricamente se han impuesto. Así ocurre en la práctica del aula. Como afirma Giménez (2008), el dominio de los sistemas de representación y comunicación como formas de construcción de conocimiento significativo permiten un desarrollo integral de las personas.

Con el trabajo en gran grupo basado en la crítica constructiva de los esquemas de los alumnos se desarrollan diversas competencias (también

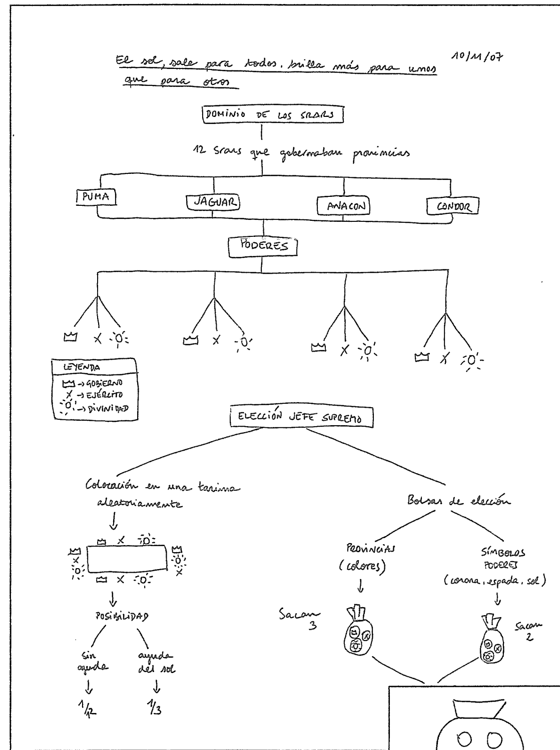


Imagen 5. Esquema de una alumna a partir del relato, con una representación madura, bien organizada y simbólica

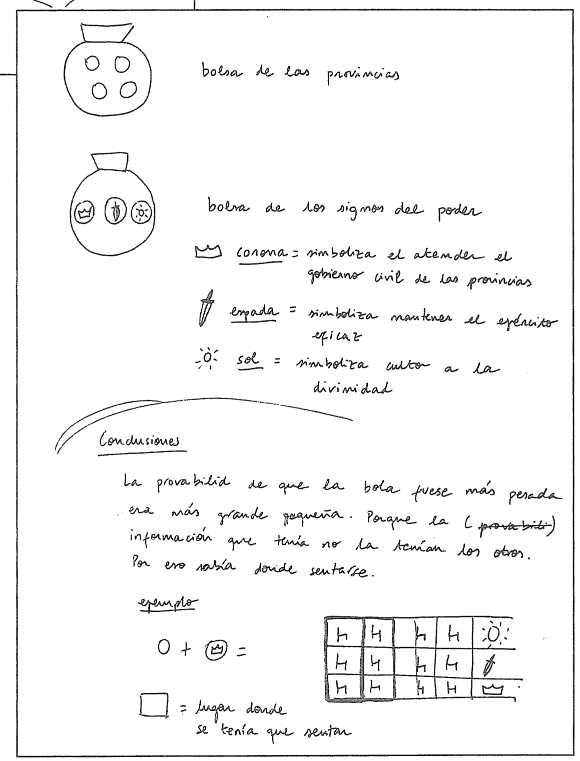


Imagen 6. Representación de la misma historia, más cercana a la realidad y con más texto explicativo

transversales) relacionadas con el saber actuar, la movilización de recursos personales para conseguir la realización personal y convertirse en personas responsables, autónomas e integradas socialmente, tal como se destaca en el actual currículo de ESO de nuestro contexto. Este tipo de situaciones exige a los alumnos una actitud inicial de reflexión, deben formarse una opinión personal, prepararse y exponer una argumentación para poder explicitar dicha opinión de modo que sea comprendida; y finalmente, deben participar en el debate con una actitud de escucha activa. Se desarrolla así la competencia democrática. Por otro lado, juzgar el esquema de otro alumno lleva a analizar aspectos comunicativos, de representación, de contenido matemático, de narración de una historia. Deben ponerse en juego conocimientos, habilidades y actitudes, y hacerlo en interacción con los demás.

Conclusiones

El éxito de una secuencia de actividades en el aula de matemáticas es un asunto complejo, y se debe a la conjunción de diversos factores. He señalado algunos en relación con la tarea, su gestión y el papel del profesor. La tarea presenta algo nuevo al alumnado, sorprendente (e inesperado puesto que la intuición juega malas pasadas en los temas de azar); la gestión de la actividad sienta las bases de una comunidad de prácticas (en la que el error incluso es bienvenido) que induce a la construcción negociada de significados; el profesor debe gestionarlo todo (hacerlo, a ratos, desde un papel aparentemente secundario) y conseguir que cada elemento aporte su parte.

La conexión entre distintas partes de las matemáticas escolares que habitualmente se enseñan por separado también ayuda tanto en la motivación como en la construcción de significados. Además, se muestran una matemáticas cercanas a la resolución de situaciones problemáticas (o engañosas) de la vida real, en un contexto (los juegos de azar, la adivinación del futuro) que resulta familiar al alumnado y que, al final, resuelve el enigma creado a partir de la sorpresa inicial, y da algunas claves de uso inmediato y personal para evitar caer en engaños o ser más ingenuo de lo necesario.

Referencias bibliográficas

ARCAVI, A. (2007): «El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos». *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, pp. 59-75.

BISHOP, A.J. (1999): *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona. Paidós.

BURGOS, J. (1994): *Los relatos de Gudor Ben Jusá.* Madrid. Fundación Gral UPM.

GIMÉNEZ, J. (2008): «Los desafíos competenciales matemáticos en educación infantil». . *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, pp. 5-9.

GRUP VILATZARA (2001): «Proyectos en la ESO. Una actividad rica». *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, pp. 21-36.

— (2006): *¿Es posible viajar con las matemáticas? Viaje y matemáticas. Un paseo por el mundo y las matemáticas.* Badajoz. FESPM-ICE UAB.

PLANAS, N. (2007): «Pensar la diversidad desde la interculturalidad». *Aula de Innovación Educativa*, 163, pp. 70-73.

SKOVSMOSE, O. (1999): *Hacia una filosofía de la educación crítica.* Bogotá. Una Empresa Docente.

VILELLA, X. (2006): «Matemáticas y culturas: una relación pendiente de profundizar». *SUMA*, 52, pp. 51-61.

— (2007): *Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural.* Barcelona. ICE/Horsori.